Mariusz Kawecki

Jak zdać maturę nie lubiąc matematyki

tylko 20 godzin powtórki do matury

wydanie II uzupełnione

Mariusz Kawecki

Jak zdać maturę nie lubiąc matematyki

tylko 20 godzin powtórki do matury

wydanie II uzupełnione

ISBN 978-83-947155-2-6

Spis treści

Wstęp

Większość uczniów, niestety, nie lubi matematyki, nie rozumie jej i w związku z tym nie zna. Przedmaturalne powtórki odkłada na później, aż w końcu, zwykle w okolicach studniówki strach przed maturą z matematyki osiągnie apogeum. Jak zdać maturę nie lubiąc matematyki? Przede wszystkim, nie należy zakładać, że nauczymy się całego materiału przez parę miesięcy, skoro nie udało to się w ciągu trzech lub czterech lat. Lepiej nauczyć się rzeczy najważniejszych i takich, które najczęściej obecne są w zadaniach maturalnych, niż niepotrzebnie tracić czas na cały, trudny materiał.

W tej książce wybrano około 60% materiału z profilu podstawowego, który obecny jest w około 90% zadań maturalnych. Nie znajdziemy tu funkcji wykładniczej, przekształceń funkcji, przekształceń płaszczyzny, geometrii przestrzennej i innych trudniejszych fragmentów programu, których uczeń nie lubiący matematyki i nie znający jej nie nauczy się w trakcie powtórek. Wszystko, co jest w książce da się zrozumieć i da się nauczyć w ciągu 20 lekcji, co zagwarantuje sukces maturalny na poziomie powyżej 40%.

Uczeń nie lubiący matematyki męczy się także w trakcie rozwiązywania zadań. Nie ma sensu robić coś na siłę. Lepiej przeczytać przykładowe rozwiązania, podpatrzeć je, niż samemu tracić czas na wyważanie otwartych drzwi. W książce wszystkie przykłady mogące wystąpić w zadaniach maturalnych są rozwiązane. Rozwiązania te są zwykle zbliżone do rozumowań uczniowskich, co oznacza, że nie są optymalne ale łatwo przyswajalne. Zadania przedstawione w książce podzielono na dwa rodzaje, typowe problemy sprawdzane w testach maturalnych oraz zadania zaproponowane przez CKE. Sposoby rozwiązań tych ostatnich wielokrotnie różnią się od propozycji CKE i idą w kierunku rozumowań uczniowskich.

Do przeczytania książki i nauczenia się tego zakresu materiału wystarczy 20 godzin. Proponowałbym każdego dnia przerobić jedną godzinę. Moje wieloletnie doświadczenie uczy, że taki dobór materiału i metoda gwarantują sukces maturalny, czego życzę wszystkim czytelnikom zdającym egzaminy dojrzałości. Chciałbym też prosić wszystkich czytelników o przesyłanie uwag i dostrzeżonych błędów na adres:

ksiazki2017@gmail.com

Mariusz Kawecki

Godzina **1**

Liczby

Liczby naturalne to zbiór liczb postaci $\mathrm{N} = \{0,1,2,3...\}$. Czasami mówi się o liczbach naturalnych dodatnich $\mathrm{N}_+ = \{1,2,3...\}$ (liczba 0 nie jest dodatnia, nie jest też ujemna). Wśród liczb naturalnych wyróżniamy liczby pierwsze.

Liczby pierwsze to takie, które są większe od 1 i dzielą się tylko przez 1 i siebie np. 2, 3, 5, 7, 11...

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Liczby, które nie są pierwsze oprócz siebie i 1 mają inne dzielniki np. $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$, $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$... Każdą liczbę naturalną można zapisać jako iloczyn liczb pierwszych. Procedurę, która to czyni nazywamy rozkładem na czynniki pierwsze. Polega ona na tym, że rozkładaną liczbę dzielimy przez kolejne liczby pierwsze dopóki się da.

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Liczba $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
Liczba $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

Jeżeli z obu rozłożonych liczb wybierzemy wspólne czynniki pierwsze i je pomnożymy, to otrzymana liczba będzie dzielnikiem obu wyjściowych i to największym dzielnikiem. Taką liczbę nazywamy **Największym Wspólnym Dzielnikiem**:

$$NWD(120,200) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$$

Jeżeli do wspólnych czynników dopiszemy z obu liczb te czynniki, które wspólne nie są i pomnożymy je, to otrzymana liczba będzie dzieliła się przez obie wyjściowe i będzie najmniejszą o tej własności. Taką liczbę nazywamy **Najmniejszą Wspólna Wielokrotną**:

$$NWW(120,200) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 600$$

Dwie liczby a, b dla których $NWD(a,b) = 1$ nazywają się **względnie pierwsze** np. $NWD(7,20) = 1$, $NWD(30,49) = 1$.

Sprawdź czy rozumiesz! Policz: $NWD(180,250)$ i $NWW(280,160)$.

Jeżeli do liczb naturalnych dorzucimy liczby naturalne poprzedzone znakiem minus, otrzymamy **liczby całkowite**: $\mathrm{C} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,...\}$. Ilorazy (dzielenie) liczb całkowitych przez siebie tworzą **liczby wymierne**: $\mathrm{W}=\{0,1,-1,2,2/3,...\}$. Zauważmy, że $0 = \frac{0}{2}$, $1 = \frac{1}{1}$ $-2 = \frac{-2}{1}$ to ilorazy liczb całkowitych a więc również liczby wymierne.

Pozostałe liczby nazywamy **liczbami niewymiernymi** $\mathrm{NW}=\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt[3]{4},\pi ...\}$. Zauważmy, że liczba π (w przybliżeniu $3{,}14$) jest liczbą niewymierną. Często używanymi liczbami wymiernymi są ułamki dziesiętne.

Jeżeli w zapisie ułamka dziesiętnego ilość cyfr po przecinku jest skończona, to ułamek dziesiętny nazywa się **ułamkiem skończonym** np. 2,35. Jeżeli ilość cyfr jest nieskończona i powtarza się w pewnych grupach, to taki ułamek nazywamy **ułamkiem okresowym** 2,12121212... = 2, (12). Jeżeli ilość cyfr po przecinku jest nieskończona i nie powtarza się w pewnych grupach to jest to **liczba niewymierna**: 2,1234567891011...

Sposób zamiany ułamka okresowego na zwykły jest bardzo prosty. Spójrzmy na przykłady:

$$0,(2)=\frac{2}{9},\ 0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},\ 0,(15)=\frac{15}{99},\ 2,(12)=2+0,(12)=2\frac{12}{99}=2\frac{4}{33},\ 0,(123)=\frac{123}{999},$$

$$0,(251)=\frac{251}{999}\ \text{i ogólnie: } 0,(abcde)=\frac{abcde}{99999}\ \text{więc } 0,(56471)=\frac{56471}{99999}$$

Sprawdź czy rozumiesz! Zamień na ułamek zwykły: $0,(323)$, $3,(25)$

Oprócz czterech podstawowych działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie) liczby możemy potęgować i pierwiastkować. Przypominamy definicję potęgi:

$$a^0=1,\ a^1=a$$
$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n}$$
$$a^{-1}=\frac{1}{a},\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

Symbol 0^0 nie jest określony. Liczba, którą podnosimy do potęgi ujemnej musi być różna od 0. Pierwiastkowanie, to w gruncie rzeczy potęgowanie gdyż:

$$\boxed{\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}}$$

Pierwiastkując pamiętajmy, że **pierwiastki stopni parzystych istnieją tylko z liczb dodatnich i same są liczbami dodatnimi**. Pierwiastki stopni nieparzystych mogą być wyciągane z liczb ujemnych i są wtedy liczbami ujemnymi.

$$\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}},\ (-27)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-27}=-3,\ 81^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{81}=3,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2,\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{27}{8}$$

Potęgi i pierwiastki spełniają podobne prawa, zwróćmy uwagę na grupy (2) i (3).

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Zadania występujące na maturze

1. Ze zbioru liczb $\left\{\frac{5}{7},\ \sqrt{7},\ 1.(13),\ \sqrt{9},\ \sqrt[3]{9},\ 5,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{4}}\right\}$ wybierz liczby wymierne.

Liczby wymierne w tym zbiorze to: $\frac{5}{7},\ 1,(13) = 1\frac{13}{99},\ \sqrt{9} = 3,\ 5,\ \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$.

2. Pokaż, że liczby 180 i 245 nie są względnie pierwsze.
Rozkładamy obie liczby na czynniki:

180	2	245	5
90	2	49	7
45	3	7	7
15	3	1	
5	5		
1			

Obie liczby mają wspólny czynnik większy od 1. Ich $NWD(180, 245) = 5$, zatem nie są względnie pierwsze.

3. Policz: $\left[(1,(7) - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right]^3 \left(\frac{\sqrt{12}}{5} - \frac{1}{7}\right)^{-5}$.

Przykład pozornie wygląda na skomplikowany ale jak policzymy wartość nawiasu kwadratowego okaże się, że:

$$\left[(1,(7) - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right] = 1\frac{7}{9} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} - \frac{16}{9} = 0$$

Zatem wartość całego wyrażenia wynosi 0.

4. Policz: $\frac{3^{-3} \cdot 27^4}{9^{-5} : \left(\frac{1}{81}\right)^{-2}}$.

Zauważmy, że potęgowane liczby same są potęgo 3. Przekształcamy wyrażenie tak, żeby to wykorzystać:

$$\frac{3^{-3} \cdot 27^4}{9^{-5} : \left(\frac{1}{81}\right)^{-2}} = \frac{3^{-3} \cdot (3^3)^4}{(3^2)^{-5} : \left(\frac{1}{3^4}\right)^{-2}} = \frac{3^{-3} \cdot 3^{12}}{3^{-10} : 3^8} = \frac{3^9}{3^{-18}} = 3^{27}$$

5. Porównaj liczby: 5^{300} i 7^{200}.
Zauważmy, że: $5^{300} = 5^{3\cdot 100} = (5^3)^{100} = 125^{100}$ i $7^{200} = 7^{2\cdot 100} = (7^2)^{100} = 49^{100}$, więc $5^{300} > 7^{200}$.

6. Pomiędzy liczby $\frac{3}{77}$ i $\frac{4}{77}$ wstaw dwie różne liczby wymierne.
Należy rozszerzyć ułamek, to znaczy licznik i mianownik pomnożyć przez tę samą liczbę większą od 1. Ponieważ mamy wstawić dwie różne liczby pomnóżmy licznik i mianownik przez 3, otrzymamy:

$$\frac{9}{231} \text{ i } \frac{12}{231}$$

Między te liczby można wstawić:

$$\frac{10}{231} \text{ i } \frac{11}{231}$$

Gdybyśmy mieli wstawić trzy a nie dwie różne liczby, należałoby pomnożyć licznik i mianownik przez 4, dla wstawienia jednej liczby wystarczy pomnożyć przez 2.

7. a) Wyłącz czynnik przed pierwiastek $\sqrt[10]{64}$. b) Wprowadź czynnik pod pierwiastek $3\sqrt[3]{2}$.

a) $\sqrt[6]{128} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^6} \cdot \sqrt[6]{2} = 2\sqrt[6]{2}$

b) $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$

8. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}-2}$ c) $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

W przykładzie a) licznik i mianownik mnożymy przez sam pierwiastek, w przykładach b) i c) licznik i mianownik mnożymy przez tzw. sprzężenie czyli wyrażenie z mianownika ze zmienionym znakiem i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{3\cdot 5} = \frac{\sqrt{15}}{15}$

b) $\frac{2}{\sqrt{3}-2} = \frac{2}{\sqrt{3}-2} \cdot \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2} = \frac{2\sqrt{3}+4}{(\sqrt{3})^2-(2)^2} = \frac{2\sqrt{3}+4}{3-4} = -2\sqrt{3}-4$

c) $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3-2} = 3\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

9. Policz $16^{-2} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{8}}}$.

$$16^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} = (2^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\left((2^8)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot (2^8)^{\frac{1}{8}} = 2^{-2} \cdot 2^1 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

10. Policz $\dfrac{\left(2^{-3}+\sqrt{2}\right)^{1,(3)-\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}}{\left(81^{\frac{1}{4}}-2\right)^{5}}$.

$$\frac{\left(2^{-3}+\sqrt{2}\right)^{1,(3)-\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}}{\left(81^{\frac{1}{4}}-2\right)^{5}}=\frac{\left(2^{-3}+\sqrt{2}\right)^{1\frac{3}{9}-\frac{4}{3}}}{(3-2)^{5}}=\frac{\left(2^{-3}+\sqrt{2}\right)^{0}}{1^{5}}=\frac{1}{1}=1$$

Zadania proponowane przez CKE

11. Wartość wyrażenia $\dfrac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{-16}}{-8}$ jest równa:

A. $2^{\frac{1}{3}}$ B. $2^{\frac{1}{2}}$ C. 2^{-1} D. 2^{-2}

$$\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{-16}}{-8}=\frac{\sqrt[3]{4\cdot(-16)}}{-8}=\frac{-\sqrt[3]{4\cdot 4\cdot 4}}{-8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=2^{-1}$$

12. Odwrotnością liczby $2\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$ jest liczba:

A. $-2^{\frac{11}{2}}$ B. $-2^{-\frac{11}{2}}$ C. $2^{-\frac{11}{2}}$ D. $2^{\frac{11}{2}}$

$$2\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}=2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2^{3}\right)^{\frac{4}{3}}=2^{\frac{2}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{8}{2}}=2^{\frac{11}{2}}$$

13. Liczba $\sqrt[3]{4^{-1}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{3}}$ jest równa:

A. $2^{\frac{1}{6}}$ B. $2^{\frac{1}{4}}$ C. $2^{\frac{1}{3}}$ D. $2^{\frac{11}{12}}$

$$\sqrt[3]{4^{-1}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{3}}=(2^{-2})^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot(2^{4})^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}=2^{-\frac{8}{12}}\cdot 2^{\frac{3}{12}}\cdot 2^{\frac{16}{12}}=2^{\frac{11}{12}}$$

14. Na tablicy zapisano następujące potęgi: $(2^{2})^{(2^{2})}$, $(2)^{\left(2^{2^{2}}\right)}$, $\left(2^{2^{2}}\right)^{2}$, $(2)^{(2^{2})^{2}}$. Ile różnych liczb reprezentują zapisy?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

$(2^{2})^{(2^{2})}=(2^{2})^{4}=2^{8}$

$\left(2^{2^{2}}\right)^{2}=(2^{4})^{2}=2^{8}$

$(2)^{\left(2^{2^{2}}\right)}=(2)^{(2^{4})}=2^{16}$

$(2)^{(2^{2})^{2}}=(2)^{2^{4}}=2^{16}$

Godzina **2**

Procenty

Procent to jedna setna $1\% = 0,01$. **Promil to jedna tysięczna** $1‰ = 0,001$. Jeżeli umiesz liczyć na ułamkach, to umiesz również liczyć procenty. Jeżeli chcesz policzyć 15% ze 120 to znaczy mnożysz $0,15 \cdot 120 = 18$. Jeżeli cenę towaru zwiększono o 20% a przed podwyżką towar kosztował 250 zł, to teraz kosztuje $250 + 0,2 \cdot 250 = 300$ zł. Jeżeli teraz obniżymy cenę o 20% to nie wrócimy do ceny pierwotnej, gdyż 20% z 300 odejmujemy od 300: $300 - 0,2 \cdot 300 = 240$ zł. Postawmy pytanie o ile procent należy obniżyć cenę, żeby powrócić do ceny wyjściowej 250 zł.? Zauważmy, że nasze pytanie można opisać równaniem:

$$300 - x \cdot 300 = 250 \;\Rightarrow\; 50 = x \cdot 300 \;\Rightarrow\; x = \frac{50}{300} \approx 0,1666... = 16,6\%$$

Punkty procentowe to różnica tego samego typu wielkości wyrażanych w procentach. Dwa ośrodki badawcze badają jaki procent populacji nosi w zimie czapki uszatki. Jeden ośrodek stwierdził, że jest to 15%, drugi, że czapki uszatki nosi 20% populacji. Oba wyniki różnią się o 5 punktów procentowych. Gdybyśmy powiedzieli, że wyniki różnią się o 5%, popełnilibyśmy błąd gdyż:

$$15\% + 5\% \cdot 15\% = 0,15 + 0,05 \cdot 0,15 = 0,1575 = 15,75\%$$

Co oznacza, że drugi ośrodek musiałby stwierdzić, że czapki uszatki nosi 15,75% populacji.

W zagadnieniach bankowych ważną rolę odgrywa odróżnienie **procentu prostego** od **procentu składanego**. Kwota, którą deponujemy w banku nazywa się kapitałem. **Jeżeli po okresie rozliczeniowym odsetki nie są dopisywane do kapitału i w następnym okresie rozliczeniowym nie są od nich naliczane kolejne odsetki, to mamy doczynienia z procentem prostym**. Wartość depozytu z takiej lokaty obliczamy zgodnie ze wzorem:

$$\boxed{W = K(1 + p \cdot n)}$$

gdzie W to wartość depozytu (to co mamy w banku wraz z kapitałem początkowym), K kapitał początkowy, p procent przypadający na okres obliczeniowy, n ilość okresów obliczeniowych. **Jeżeli po okresie rozliczeniowym odsetki są dopisywane do kapitału i w następnym okresie rozliczeniowym są od nich naliczane kolejne odsetki, to mamy doczynienia z procentem składanym**. Wartość depozytu przy procencie składanym liczymy ze wzoru:

$$\boxed{W = K(1 + p)^n}$$

Zwróćmy uwagę, że w obu wypadkach procent p musi przypadać na okres obliczeniowy n. Przykładowo jeżeli bank proponuje procent składany w wysokości 12% w skali roku a odsetki kapitalizuje kwartalnie to z 1000 zł lokaty otrzymamy po roku kwotę $W = 1000(1+0,03)^4 \approx 1125,51$ zł, gdyż $p = 12\% : 4 = 3\%$, $n = 4$ (w roku są 4 kwartały). Gdyby bank proponował procent zwykły, to: $W = 1000(1+0,03\cdot 4) = 1120$ zł, co oznacza, że lokata przy procencie składanym jest bardziej opłacalna.

Sprawdź czy rozumiesz! Który z banków daje lepsze warunki: A, gdzie lokata jest na 5% w skali roku, odsetki kapitalizowane są kwartalnie czy B, gdzie lokata jest na 4% w skali roku a odsetki kapitalizowane są miesięcznie?

Zadania występujące na maturze

1. a) Oblicz 120% z liczby 12. b) Jakim procentem liczby 60 jest liczba 100? c) Jaka to liczba, której 2% równa się 25?

a) $1,2\cdot 12 = 14,4$

b) $p\cdot 60 = 100 \;\Rightarrow\; p = \dfrac{100}{60} = 1,666... = 166,6\%$

c) $0,02x = 25 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{25}{0,02} = 1250$

2. Za prawidłowe rozwiązanie testu można uzyskać 50 punktów. Jacek uzyskał 45 punktów, Placek 25. O ile procent wynik Jacka był większy od wyniku Placka? O ile punktów procentowych różnią się wyniki Jacka i Placka.

$25 + p\cdot 25 = 45 \;\Rightarrow\; p\cdot 25 = 20 \;\Rightarrow\; p = \dfrac{20}{25} = 0,8 = 80\%$

Jacek uzyskał: $\dfrac{45}{50} = 0,9 = 90\%$ punktów.

Placek uzyskał: $\dfrac{25}{50} = 0,5 = 50\%$ punktów.

Oba wyniki różnią się o 40 punktów procentowych.

3. Cenę pewnego towaru zwiększono o 10%. Ponieważ nie zanotowano wzrostu sprzedaży nową cenę obniżono o 15%. Po tych operacjach towar kosztuje 233,75 zł. Jaka cena towaru była na początku?

x - początkowa cena towaru, stąd równanie:

$(x+0,1x) - 0,15(x+0,1x) = 233,75$

$1,1x - 0,15\cdot 1,1x = 233,75 \;\Rightarrow\; 0,935x = 233,75 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{233,75}{0,939} = 250$ zł.

4. Jaka to liczba, której 75% jest równe tej liczbie zmniejszonej o 10?

x - nieznana liczba, z treści zadania mamy $0,75x = x - 10$, $0,25x = 10$

$x = \dfrac{10}{0,25} = 40$

5. Zmieszano 2 kg solanki 10% z 3 kg solanki 20%. Roztwór o jakim stężeniu soli otrzymano?

W tego typu zadaniach należy pamiętać, że ilość soli przed zmieszaniem jest równa ilości soli po zmieszaniu roztworów. stąd równanie $0,1\cdot 2+0,2\cdot 3=p\cdot 5$, gdzie p to stężenie soli otrzymanego roztworu.

$$p=\frac{0,1\cdot 2+0,2\cdot 3}{5}=\frac{0,8}{5}=0,16=16\%$$

6. Ile czystej wody należy dodać do 3 kg solanki 15% aby jej stężenie spadło do 10%?

Podobnie jak w zadaniu poprzednim ilość soli przed i po dodaniu wody pozostaje niezmienna. Niech x oznacza ilość wody, którą należy dodać do solanki.

$$0,15\cdot 3=0,1(3+x)\ \Rightarrow\ 0,45=0,3+0,1x\ \Rightarrow\ 0,1x=0,15\ \Rightarrow\ x=\frac{0,15}{0,1}=1,5\ [\mathrm{kg}]$$

7. Liczba mieszkańców największego miasta w pewnym kraju stanowi 40% pozostałej liczby mieszkańców tego kraju. Ile procent mieszkańców kraju stanowi liczba mieszkańców tego miasta?

x - liczba mieszkańców kraju, y - liczba mieszkańców największego miasta

p - procent mieszkańców kraju, którzy są mieszkańcami największego miasta

$$y=0,4(x-y)\ \Rightarrow\ y=0,4x-0,4y\ \Rightarrow\ 1,4y=0,4x\ \Rightarrow\ \frac{y}{x}=\frac{0,4}{1,4}\approx 0,2857=28,6\%$$

$$px=y\ \Rightarrow\ p=\frac{y}{x}=28,6\%$$

8. Cenę pewnego towaru obniżono dwukrotnie. Za pierwszym razem o 15%, za drugim o 20%. O ile procent obniżono cenę towaru po obu obniżkach w stosunku do ceny pierwotnej?

x - początkowa cena towaru

$(x-0,15x)=0,85x$ - cena towaru po pierwszej obniżce

$0,85x-0,2\cdot 0,85x$ - cena towaru po drugiej obniżce

$0,85x-0,2\cdot 0,85x=0,68x$

Skoro po obniżkach towar kosztuje $0,68x$, jego cenę obniżono o 0,32 czyli 32%.

9. Po pierwszym roku produkcji nowego modelu samochodu fabryka sprzedała 20000 sztuk. W ciągu następnych 4 lat sprzedaż wzrastała o 10% rocznie. Ile samochodów sprzedała fabryka po piątym roku produkcji? Ile samochodów sprzedała fabryka od początku produkcji?

Zgodnie z warunkami zadania można zbudować tabelkę sprzedaży:

	po I roku	po II roku	Po III roku	Po IV roku	Po V roku
Ilość	20000	22000	24200	26620	29282

Łączna ilość = 20000+22000+24200+26620+29282=122102

Po piątym roku produkcji sprzedano 29282 samochodów, łącznie sprzedano 122102 samochodów.

10. Odsetki dwóch kredytów o łącznej wartości 150000 zł wynoszą rocznie 5500 zł. Jeden kredyt został wzięty na 3% w skali roku, drugi na 4%. Oblicz wielkość każdego kredytu.

x - wartość pierwszego kredytu, $(150000-x)$ - wartość drugiego kredytu

$$0,03x+0,04(150000-x)=5500 \;\Rightarrow\; 0,03x+6000-0,04x=5500$$

$$500=0,01x \;\Rightarrow\; x=\frac{500}{0,01}=50000$$

Wartość pierwszego kredytu 50000 zł, wartość drugiego kredytu 100000 zł.

Zadania proponowane przez CKE

11. Na początku roku akademickiego mężczyźni stanowili 40% wszystkich studentów. Na koniec roku liczba wszystkich studentów zmalała o 10% i wówczas okazało się, że mężczyźni stanowią $33\frac{1}{3}\%$ wszystkich studentów. O ile procent zmieniła się liczba mężczyzn na koniec roku w stosunku do liczby mężczyzn na początku roku?

x - liczba wszystkich studentów na początku roku
p - procent zmiany liczby mężczyzn na koniec roku

Liczba mężczyzn na początek roku: $40\%x=\frac{4}{10}x$

Liczba mężczyzn na koniec roku: $33\frac{1}{3}\%\cdot 90\%x=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}x=\frac{3}{10}x$

$$\frac{4}{10}x\cdot p=\frac{3}{10}x \;\Rightarrow\; p=\frac{3}{4}=75\%$$

Liczba mężczyzn na koniec roku stanowi 75% liczby mężczyzn z początku roku, zatem zmalała o 25% w stosunku do liczby mężczyzn z początku roku.

12. Na lokacie złożono 1000 zł przy rocznej stopie procentowej $p\%$ (procent składany). Odsetki naliczane są co kwartał. Po upływie roku wielkość kapitału na lokacie będzie równa:

A. $1000\left(1+\frac{4p}{100}\right)$ B. $1000\left(1+\frac{p}{100}\right)^4$ C. $1000\left(1+\frac{p}{400}\right)$ D. $1000\left(1+\frac{p}{400}\right)^4$

Zgodnie ze wzorem na procent składany poprawne jest D, zwróćmy uwagę, że $p\%=\frac{p}{100}$.

13. Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c. Stosunek a:b:c jest równy 3:5:7. Które zdanie jest fałszywe?
A. Liczba c jest o 12,5% mniejsza od liczby a+b.

B. Liczba a stanowi 20% liczby a+b+c.
C. Liczba a stanowi 25% liczby b+c.
D. Liczba b to 60% liczby c.

Możemy przyjąć a=3, b=5, c=7 wtedy:
A. a+b=8, 12,5% z 8 to 1, a+b-1=c, zdanie prawdziwe
B. a+b+c=15, 20% z 15 to 3=a, zdanie prawdziwe
C. b+c=12, 25% z 12 to 3=a, zdanie prawdziwe
D. zdanie fałszywe ponieważ 60% z 7 to 4,2

14. Nominalna stopa oprocentowania lokaty wynosi 3% w stosunku rocznym (bez uwzględnienia podatku). Odsetki kapitalizowane są na koniec każdego kolejnego okresu czteromiesięcznego. Oblicz, jaką kwotę wpłacono na tę lokatę, jeśli na koniec ośmiu miesięcy oszczędzania na rachunku lokaty było o 916,56 zł więcej niż przy jej otwarciu.

Zwróćmy uwagę, że lokata kapitalizowana jest co cztery miesiące i trwa dwa takie okresy. Stopę procentową roczną należy podzielić przez 3 aby obliczyć stopę procentową na okres rozliczeniowy (4 miesiące).

x - kwota wpłacona na lokatę, z warunków zadania mamy:

$$x+916,56=x\left(1+\frac{0,03}{3}\right)^2 \Rightarrow x+916,56=x\cdot 1,0201 \Rightarrow 916,56=0,0201x$$

$$x=\frac{916,56}{0,0201}=45600 \text{ [zł]}$$

15. W pewnej szkole przez trzy kolejne lata zmieniała się liczba uczniów. W pierwszym roku liczba uczniów zmalała i na koniec roku była o 10% mniejsza niż na początku. W drugim roku wzrosła i ukończyło go 20% więcej uczniów niż pierwszy. O ile procent, w stosunku do liczby uczniów kończących drugi rok, zmniejszyła się ich liczba w następnym roku, jeśli na koniec trzeciego roku było tyle samo uczniów co na początku pierwszego? Wynik zaokrąglij do 0,1%.

x - liczba uczniów na początku pierwszego roku
p - procent zmiany liczby uczniów pomiędzy II i III rokiem

Treść zadania można opisać tabelką:

Okres	Początek I	Koniec I roku	Koniec II roku	Koniec III roku
Uczniów	x	$0,9x$	$0,9x+0,2\cdot 0,9x=1,08x$	x

$1,08x\cdot p=x \Rightarrow p=1:1,08=0,9259=92,6\%$

Liczba uczniów zmniejszyła się o 7,4%